Sugestões para o professor

Nota: apenas se exige ao docente um conhecimento do *Geogebra* semelhante ao adquirido numa Acção de Formação de 25 horas; quanto ao aluno, pode perfeitamente desconhecer o programa.

- Deve iniciar-se a actividade com uma simples e breve apresentação de: "Barra de ferramentas", "Janela gráfica", "Janela de Álgebra", "Campo para entrada de comandos" e "Opções para comandos".

- O aluno deve ser alertado para as instruções que o próprio programa fornece, logo após a selecção de uma ferramenta, e também para os símbolos respectivos, presentes na Ficha de trabalho apenas na primeira situação em que são úteis.

- No fim de cada desafio, pode aconselhar-se o aluno a gravá-lo e, após a resolução de todos, também se pode sugerir a construção de uma página *html* para os colegas interessados.

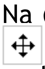
- Com a actividade nº 1, pretende-se cativar o aluno para o *Geogebra* e para as elipses.

- Na actividade nº 2, pretende-se explorar a definição de elipse. Deve fazer-se uma sumária revisão das propriedades dos triângulos. O professor pode deixar os alunos esconderem o sugerido de forma exaustiva e, depois, pedir para reconstruírem as linhas e ensiná-los a tirar partido da tecla "shift".

- O objectivo da 3ª actividade é obter uma elipse por achatamento de uma circunferência. Deve fazer-se uma sumária revisão do tema "Simetrias".

- Nesta 4ª actividade, deve orientar-se o aluno quanto à impossibilidade, neste nível de conhecimento do programa, de ter dois tipos de traço na elipse, preparando-o, assim para a última actividade.

- Na actividade nº 5, pretende-se reduzir o trabalho das duas actividades anteriores, tirando partido das possibilidades do programa e, também, mostrar ao aluno que o achatamento pode ser de acordo com qualquer factor. Na divisão do segmento em 3 partes geometricamente iguais, o professor pode solicitar ao aluno mais do que um processo para marcar os pontos igualmente espaçados (recorrendo a circunferências ou a medidas de comprimentos, por exemplo).

- Na 6ª actividade, pode ser útil explicar ao aluno como aplicar o menu com o símbolo . Deve procurar-se o caminho mais curto para obter os cinco pontos que definirão a elipse, por exemplo, aplicando "Reflexões", quer relativamente a um ponto, quer relativamente a uma recta. O professor deve, ainda, orientar no sentido de obter-se a equação tradicional da elipse.

- Com a 7ª actividade, pretende-se que o aluno explore o carácter dinâmico do *Geogebra* e que conclua quanto às características da elipse dependentes da relação entre os valores dos seus dois semieixos.

- Na 8ª actividade, o aluno pode explorar as "Opções para comandos" e resolver a questão relativa à simulação da superfície esférica da 4ª actividade, recordando o tema "Funções".

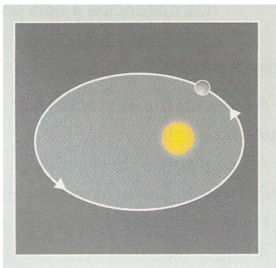
- O desafio final é um passatempo para que o aluno aprecie as elipses e aplique o que aprendeu, já fora de aula, sem a ajuda do *Geogebra*.

<u>Objectivos gerais</u>: explorar um programa computacional que ajude, eficazmente, o estudante a desenvolver a intuição geométrica, a percepção dos objectos do plano e a capacidade de fazer conjecturas acerca de relações ou propriedades geométricas; exemplificar como a Matemática apoia as outras ciências (Astronomia); dar a conhecer um pouco da História da Ciência.

<u>Objectivo particular</u>: conhecer, intuitivamente, as elipses.

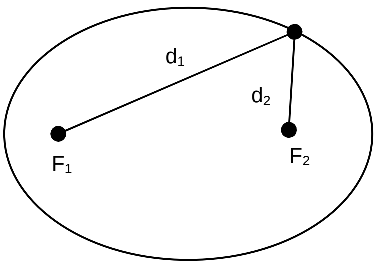
<u>Um pouco de História</u>

- No séc. XVI, conheciam-se apenas seis planetas que, segundo a teoria de Nicolau Copérnico (1473-1543), descreviam dois movimentos em órbitas circulares: um em torno de si próprio e o outro em torno do Sol.
- No início do séc. XVII, Johannes Kepler (1571-1630) efectuou um estudo preciso sobre a órbita do planeta Marte e tentou encontrar a circunferência que passava pelo conjunto das posições que conhecia; surpreendido, Kepler verificou que, em vez das posições conhecidas estarem sobre uma circunferência, encontravam-se sobre uma espécie de oval.
- Felizmente para Kepler e para a ciência, já há 18 séculos atrás, o astrónomo e matemático grego Apolonius de Perga tinha estudado curvas como a que o planeta Marte descreve, tendo-as baptizado com o nome de **elipses**.
- No entanto, só em 1609 é anunciada a grande descoberta: "O planeta Marte não segue uma trajectória circular, mas uma **trajectória elíptica**."
- Posteriormente, Kepler formula a sua primeira lei: "Os planetas descrevem uma **trajectória elíptica** da qual o Sol ocupa um dos **focos**."



<u>Definição</u>

Em várias situações (cortes num cilindro por um plano que não é paralelo às bases, sombras de objectos circulares, projecções de focos de luz numa parede, órbitas dos planetas, etc), encontramos uma curva que parece uma *circunferência deformada*. Esta curva chama-se elipse e pode ser definida da seguinte maneira: **Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos tais que a soma das suas distâncias a dois pontos fixos, focos, é constante (e maior que a distância entre esses pontos).**



$d_1 + d_2 =$ constante

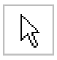
Actividade nº 1

- Escolhe, com o auxílio da Internet, uma imagem ilustrativa da informação histórica atrás referida.
- No programa *Geogebra*, no menu *Exibir*, opta por esconder os “Eixos coordenados” e a “Janela de Álgebra”.
- Insere a imagem escolhida. 
- Ajusta o seu tamanho:

  - cria um ponto no canto inferior esquerdo da figura; 

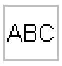
  - em “Propriedades” e clicando na imagem com o lado direito do rato, atribui-lhe a posição do 1º canto;

  - cria um novo ponto B=A+(15,0), recorrendo ao Campo para entrada de comandos;

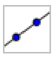
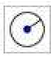
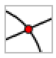
  - define-o como sendo o segundo canto.
- Centra a imagem na Janela gráfica. 
- Clicando no lado direito do rato, esconde A e B.
- Em “Propriedades”:

  _ escolhe o melhor “Preenchimento” da imagem;

  _ define a imagem como “Imagem de fundo”;

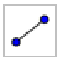
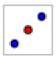
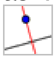
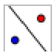
  _ escreve um título para a imagem e edita-o. 

Actividade nº 2

- No programa *Geogebra*, no menu *Exibir*, opta por esconder os “Eixos coordenados”, a “Janela de Álgebra” e o “Campo de entrada de comandos”.
- Escolhe dois pontos.
- Desenha a recta que os une. 
- Com centro em cada ponto, desenha dois conjuntos de várias circunferências concêntricas e de raios respectivamente iguais. 
- Usa, recorrendo a “Propriedades”, cores diferentes para distinguir os dois conjuntos.
- Assinala, com cor, os pontos de intersecção que te pareçam relevantes. 
- Nomeia os dois centros F_1 e F_2, clicando no lado direito do rato e escrevendo *F_1* e *F_2*.
- Calcula algumas distâncias e recorda as propriedades dos triângulos.
- “Limpa” o trabalho, escondendo a recta e todas as circunferências, clicando no lado direito do rato.
- Imagina a curva que passa pelos pontos assinalados.
- Completa:

“Trata-se de uma _________, sendo os ________ ___ e ___. É aqui evidente que a ______ das ___________________ de cada ponto da__________ aos _______ é __________________ e ________ do que a ______________ entre _____.

Actividade nº 3

- Repete os dois primeiros passo da actividade anterior.
- Desenha o segmento que une os dois pontos. 
- Determina o seu ponto médio. 
- Desenha a circunferência que tem o segmento referido como diâmetro. 
- Escolhe cinco pontos no semicírculo superior.
- Desenha as rectas que passam por eles e são perpendiculares ao diâmetro referido. 
- Assinala as intersecções dessas rectas com o diâmetro.
- Determina os pontos médios dos segmentos de recta resultantes na semicircunferência superior.
- Recordando o conteúdo programático "Reflexões", determina os simétricos dos pontos médios atrás determinados 
- "Limpa" o trabalho, escondendo todas as linhas e alguns pontos.
- Imagina a curva que passa pelos pontos sobrantes, realçando-os com cor.

Actividade nº 4

- Visualiza, agora, a cónica, atrás apenas imaginada (recorre à ferramenta cujo símbolo representa o *geogebra*).
- Realça-a a vermelho.
- Esconde os pontos simétricos determinados.
- Reconstrói a circunferência.
- Move um dos dois pontos iniciais e observa.
- Completa:

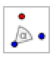
"A _________ pode ser obtida da ______________________, recorrendo a um achatamento."

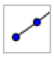
- Coloca a tracejado o arco superior da nova curva, recorrendo a "Propriedades" (se não conseguires, apenas imagina).
- Completa:

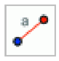
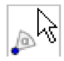
"Desta forma, também se pode simular uma __________________________ _____________________, em perspectiva."

Actividade nº 5

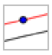
- Repete (ou copia) os quatro primeiros passos da terceira actividade.
- Escolhe um outro ponto do diâmetro, *P*.
- Desenha a recta perpendicular ao diâmetro e que passa por *P*.
- Assinala a sua intersecção com a circunferência, *A*.
- Divide em três partes geometricamente iguais o segmento *[AP]*:

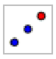
  - cria um outro ponto, A', aplicando ao ponto A uma rotação com centro em *P* e amplitude 45º; 

- constrói a semi-recta *PA'*; 

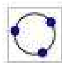
- nessa semi-recta, marca, a partir de *P*, três pontos igualmente espaçados;  

- une, com uma recta, o último desses pontos a *A*;

- traça rectas paralelas a essa, passando por cada um dos pontos marcados na semi-recta. 

- Assinala o ponto correspondente ao primeiro terço do segmento.
- Determina o seu simétrico relativamente a *P*. 
- Sobre ponto e simétrico, clica com o lado direito do rato e selecciona "Activar traço".
- Esconde todos os objectos auxiliares.
- Torna *P* móvel e confirma conclusões anteriores.

<u>Actividade nº 6</u>

- No menu *Exibir*, opta por deixar tudo visível.
- Marca, geometricamente, os pontos *A (4,0)* e *B (0,4)*.
- Marca, algebricamente, os pontos C *(-4,0)* e D *(0,-4)*.
- Desenha a circunferência que passa por esses quatro pontos. 
- Observa a sua equação, na "Janela de Álgebra".
- Aplica a esta circunferência o essencial dos desafios anteriores e obtém uma elipse.

- Relaciona a ordenada de um ponto da elipse com a do ponto da circunferência de igual abcissa.

- Recorrendo a mudança de variáveis, obtém a equação da elipse.
- Confirma, recorrendo à "Janela de álgebra", a equação obtida.
- Completa, generalizando:

"Dados os nºs reais *a e b*, ____________________ maior e menor da elipse, uma equação que a define é ____________________________.

<u>Actividade nº 7</u>

- Recorda as duas equações atrás obtidas, a particular e a geral.
- Cria selectores para *a* e *b*:

- no "Campo para entrada de comandos", escreve *a=4* e *b=2*;

- introduz a equação geral da elipse deduzida atrás;

- clica, em "*a=4*" e "*b=2*", no lado direito do rato e escolhe "Exibir objecto";

- arrasta o ponto de cada selector de modo a alterar *a* e *b*.

- Realça a elipse com uma cor.
- Variando *a* e *b*, observa e completa:

" Quando o valor de *a* é ______________ ao de *b*, o eixo ____________ da elipse é _______________; quando o valor de *a* é _______________ ao de *b*, o eixo __________ da elipse é _______________."

"Quando o valor de *a* é ______________ do de *b*, a elipse é mais ____________________; quanto mais _______________ forem os valores de *a* e *b*, mais ____________________ será a elipse; quando os valores de *a* e *b* forem ____________, a elipse degenera numa _____________________, de raio ____ ou ____ e, portanto, de equação _________________ ou _________________, obviamente."

- Cria um título adequado, que contenha uma parte estática e outra móvel, sabendo que tens de colocar entre aspas a fixa, clicar, na "Janela algébrica", nos respectivos valores móveis e, só depois, clicar em "Aplicar".
- Faz experiências.

Actividade nº 8

- Observando os trabalhos anteriores, completa:

"Uma elipse nunca pode ser a representação geométrica de uma _________ por não traduzir uma _____________________ ______________________".

- Ponderando sobre a conclusão anterior, descobre uma forma de resolver a "impossibilidade" que concluíste na 4ª actividade, recorrendo ao "Campo para entrada de comandos".

Desafio (T.P.C.)

Num pedaço de papel de lustro, desenha uma circunferência e, no seu interior, um ponto P. Dobra o papel de modo a fazer passar a circunferência por P e vinca a dobra. Repete esta operação algumas vezes, procurando percorrer todas as zonas da circunferência. No final, as dobras do papel envolverão uma elipse como a da figura. Justifica.