Una breve historia de las funciones

En las matemáticas actuales el concepto de función se define del modo siguiente:

Sean **A** y **B** conjuntos. Se llama **función** entre **A** y **B** a cualquier relación establecida entre los elementos de **A** y **B** de tal modo que a cada elemento de **A** le corresponde un único elemento de **B**.[1]

Para representar las funciones se suele utilizar la notación:

$\mathbf{f}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ para los conjuntos, $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y}$ para los elementos

A se llama *conjunto inicial* y **B** es el *conjunto final*

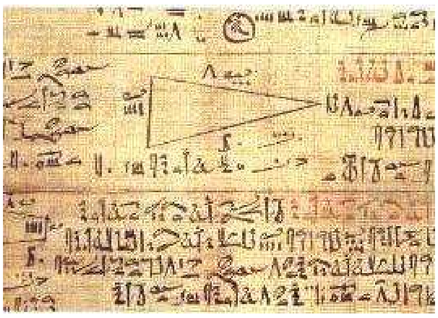
$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y}$ se expresa como ***y*** *es la imagen de* ***x*** *a través de la aplicación* ***f***.

Se pueden definir funciones entre cualquier tipo de conjuntos, pero las más interesantes son las que se establecen entre conjuntos de números. En los próximos temas vamos a estudiar funciones definidas en el conjunto de los números reales: las *funciones reales* (conjunto final) *de variable real* (conjunto inicial), $\mathbf{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

La pregunta que cabe hacerse ahora es: ¿cómo se ha llegado hasta aquí?. Es importante entender que el concepto se desarrolló con el paso del tiempo; su significado fue cambiando y también la forma en que se definía, ganando precisión a través de los años.

Lo más apropiado, quizás, sea comenzar en Mesopotamia[2]. En las matemáticas babilónicas encontramos tablas con los cuadrados, los cubos y los inversos de los números naturales. Estas tablas sin duda definen funciones de **N** en **N** o de **N** en **R**, lo que no implica que los babilonios conocieran el concepto de función. Conocían y manejaban funciones específicas, pero no el concepto abstracto y moderno de función[3].

En el antiguo Egipto también aparecen ejemplos de usos de funciones particulares. Una tabla con la descomposición de **2/n** en fracciones unitarias[4] para los impares **n** desde 5 hasta 101 aparece en el Papiro Rhind o Papiro Ahmes, de unos 4000 años de antigüedad considerado como el primer tratado de matemáticas que se conserva.



Detalle del Papiro Ahmes

En la Grecia clásica también manejaron funciones particulares —incluso en un sentido moderno de relación entre los elementos de dos conjuntos y no sólo de fórmula— pero es poco probable que comprendieran el concepto abstracto (y moderno) de función[5].

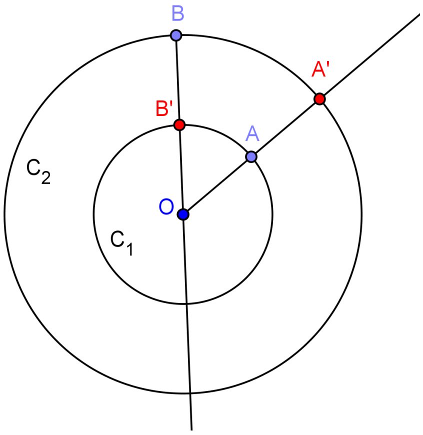
[1] Utilizar diagramas de Venn para mostrar qué es función y qué no lo es
[2] Preguntar por su localización y época. ¿Qué saben de la civilización de Mesopotamia?
[3] Escribir en la pizarra estas tablas
[4] Explicar qué son las fracciones unitarias y porqué eran importantes en Egipto
[5] Las funciones son las expresión matemática de las relaciones. Esto es más que la idea clásica de función como fórmula

La mayor parte de los historiadores de las matemáticas parecen estar de acuerdo en atribuir a Nicole Oresme (1323-1382) la primera aproximación al concepto de función, cuando describió las leyes de la naturaleza como relaciones de dependencia entre dos magnitudes. Fue el primero en hacer uso sistemático de diagramas para representar magnitudes variables en un plano.[6]

Nicole de Oresme

En la revolución científica iniciada en el siglo XVI los científicos centraron su atención en los fenómenos de la naturaleza, poniendo énfasis en las relaciones entre las variables que determinaban dichos fenómenos y que podían ser expresadas en términos matemáticos. Era necesario comparar las variables, relacionarlas, expresarlas mediante números y representarlas en algún sistema geométrico adecuado.

Galileo Galilei (1564-1642) pareció entender el concepto de función aún con mayor claridad. Sus estudios sobre el movimiento contienen la clara comprensión de una relación entre variables. Entre las funciones que estudió Galileo destacan, por sus sorprendentes consecuencias:



La función *uno-a-uno* $\mathbf{n} \to \mathbf{n}^2$ entre los naturales y sus cuadrados, que demuestra que hay tantos números naturales como cuadrados perfectos.

Las funciones

$$\mathbf{f}: \mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_2 \,/\, \mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}'$$

$$\mathbf{f}^{-1}: \mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_1 \,/\, \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B}) = \mathbf{B}'$$

que prueban que dos circunferencias, una con doble radio que la otra, tienen el mismo número de puntos[7]

Casi al mismo tiempo que Galileo llegaba a estas ideas, Renè Descartes (1596-1650) introducía la *geometría analítica*. Descartes desarrolló y llevó a sus fundamentales consecuencias las ideas que siglos atrás se habían usado para representar en el plano relaciones entre magnitudes. Ahora cualquier curva del plano podía ser expresada en términos de ecuaciones y cualquier ecuación que relacionara dos variables podía ser representada geométricamente en un plano[8].

A finales del siglo XVII aparece por primera vez el término *función*. En palabras de Johann Bernoulli, una función es *"una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes".* Pero no fue hasta 1748 cuando concepto de función saltó a la fama en matemáticas. Leonhard Euler, uno de los grandes genios de las matemáticas de todos los tiempos, publicó un libro, *Introducción al análisis infinito,* en el definió función como:

[6] Dibujar varios ejemplos: velocidad/tiempo en mru y mrua, volumen/densidad

[7] Definir biyección. Cómo usar las biyecciones para contar los elementos de un conjunto. Conjuntos infinitos son aquellos biyectivos con una de sus partes propias

[8] Recordar lo leído en *Los ejes cartesianos*

> *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes.*

Pero Euler no define *expresión analítica*. Así que poco después, en 1755, tuvo que precisar su definición:

> *Si algunas cantidades dependen de otras del tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas.*

Pero la cosa seguía sin estar clara del todo: ¿cómo es esa dependencia?, ¿cómo expresarla, calcularla o representarla?, ¿cómo deben cambiar los valores de las variables?, ¿cuántas variables pueden intervenir?, ...

Retrato de Leonhard Euler

Muchos matemáticos abordaron el problema de dar una definición precisa y adecuada de función. Y así se pasaron casi dos siglos, puliendo poco a poco el concepto, hasta que, ya en el siglo XX, Edouard Goursat dio en 1923 la definición que aparece en la mayoría de los libros de textos hoy en día:

> *Se dice que* y *es una función de* x *si a cada valor de* x *le corresponde un único valor de* y*. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación* $y = f(x)$[9]

BIBLIOGRAFÍA

Carl B. Boyer. *Historia de la matemática*. Alianza Universidad Textos, 1992

Morris Kline. *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI editores, 1985

En Internet

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html
The funcion concept. J.J. O'Connor, E.F. Robertson
MacTutor History of Mathematics. University of St. Andrews, Scotland

http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/imagenes/detalle_rhind02.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a2/Oresme-Nicole.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/60/Leonhard_Euler_2.jpg

[9] Pero esta definición no era lo suficientemente precisa para las exigencias matemáticas de la época. Involucra conceptos como *valor* y *correspondencia* no adecuadamente definidos, así que aún hubo que pulirla hasta llegar al concepto que se presentó al comienzo.