Eichstätter Kolloquium zur
Didaktik der Mathematik

Februar 2006

Funktionales Denken mit der dynamischen Mathematiksoftware GeoGebra

Markus Hohenwarter

GeoGebra ist ein kostenlos verfügbares Softwaresystem für den Mathematikunterricht der Sekundarstufen, welches dynamische Geometrie, Algebra und Analysis auf neue Art und Weise verbindet. Die Software selbst sowie zahlreiche Materialien für den Unterrichtseinsatz finden sich im Internet auf http://www.geogebra.at. In diesem Aufsatz wird auf die Rolle von GeoGebra in Bezug auf funktionales Denken eingegangen. Dabei werden auch einige Möglichkeiten der dynamischen Behandlung von Funktionen mit GeoGebra vorgestellt.

Funktionales Denken

Das Konzept der *funktionalen Abhängigkeit* ist eine fundamentale Idee der Mathematik (vgl. [11]). Im Wesentlichen geht es darum, wie sich die Änderungen einer Größe auf eine abhängige Größe auswirken. Diese Idee tritt sowohl in der Geometrie, etwa bei geometrischen Abbildungen, als auch bei den reellwertigen Funktionen in der Analysis auf. Auch das mathematische Modell von GeoGebra beruht auf dynamischen funktionalen Abhängigkeiten: wird ein freies Objekt verändert, so ändern sich auch alle davon abhängigen Objekte. In diesem Abschnitt soll daher auf einige Möglichkeiten eingegangen werden, wie mit GeoGebra *funktionales Denken* gefördert werden kann.

> Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist. [12, S. 6]

Der Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten wiederum ist typisch für die Mathematik. In den Reformvorschlägen von Meran (vgl. [8]) hoben Klein und Gutzmer bereits 1908 erstmals die „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ als besondere Aufgabe hervor (vgl. [5]). Nicht nur in der Arithmetik, sondern auch in der Geometrie sollte das funktionale Denken „durch fortwährende Betrachtung der Änderungen gepflegt werden, die die ganze Sachlage durch Größen- und Lageänderungen im einzelnen erleidet.“ GeoGebra ermöglicht eine Förderung des funktionalen Denkens in beiden Bereichen mit Hilfe dynamischer Geometrie und dynamischer Funktionen.

Für Kautschitsch (vgl. [6]) hat das funktionale Denken mittels Graphen und Tabellen auch eine heuristische Funktion für das Entdecken von Invarianten, welche wiederum auch nützlich für das formelmäßige Beschreiben von Zusammenhängen sind. Neben der raschen Erzeugung von Bildern und Zahlen sieht er in diesem Zusammenhang insbesondere zwei Vorteile des Einsatzes neuer Technologien:

> Computerunstütztes funktional-kinematisches Denken ...

- hat eine verbindende und einsichtfördernde Funktion.
- erzeugt eine Gesamtschau eines Vorganges und entlastet dadurch das Gedächtnis.

Dynamische Geometrie

Der Zugmodus dynamischer Geometrie Systeme eignet sich hervorragend für die Untersuchung von Abhängigkeiten und invarianten Eigenschaften geometrischer Konstruktionen.

> Eine entscheidende Rolle kommt [...] dem funktionalen Denken zu, das durch DGS sich nicht nur auf einem Denken in und mit Funktionen beschränken muss, sondern infolge der möglichen Beweglichkeit von Figuren auch auf ein Denken mit Veränderungen von Bildern und Mustern erweitert werden kann und soll. [7, S. 115]

GeoGebra bietet neben den üblichen Konstruktionswerkzeugen die Möglichkeit, auch Bilder und Fotos gemäß den geometrischen Abbildungen zu verschieben, zu drehen, zu spiegeln oder zu strecken. Eine Besonderheit stellt zudem das interaktive Konstruktionsprotokoll dar, welches anhand des folgenden einfachen Beispiels vorgestellt werden soll.

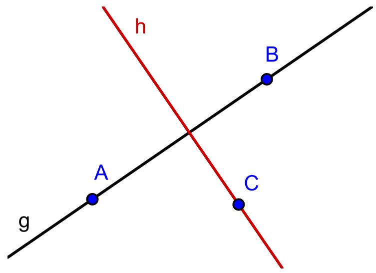

Abbildung 1: Gerade h senkrecht zu g durch C

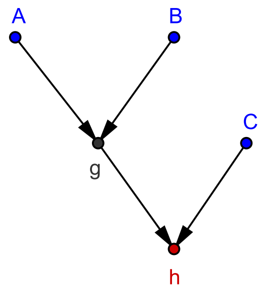

Abbildung 2: Abhängigkeitsgraph der Konstruktion aus Abbildung 1

Zu einer Geraden g durch die Punkte A und B wird die Senkrechte h durch einen weiteren Punkt C konstruiert (siehe Abbildung 1). Die Abhängigkeiten der Objekte dieser Konstruktion lassen sich in einem gerichteten Abhängigkeitsgraphen darstellen (siehe Abbildung 2). Die Punkte A, B und C sind dabei freie Objekte, da sie keine eingehenden Kanten haben. Die Gerade g ist von A und B abhängig, die Senkrechte h von g und C.

Abbildung 3: Konstruktionsprotkoll der Konstruktion aus Abbildung 1

Zusätzlich zu diesem Abhängigkeitsgraphen speichert GeoGebra auch die Konstruktionsreihenfolge, die durch den Graphen allein nicht eindeutig festgelegt ist. Diese Reihenfolge lässt sich im *Konstruktionsprotokoll* von GeoGebra als Tabelle anzeigen (siehe Abbildung 3). Mit den Pfeiltasten im unteren Teil des Fensters kann eine Konstruktion schrittweise wiederholt und 'durchgeblättert' werden. Diese Navigationsleiste lässt sich auch am unteren Rand des Geometriefensters einblenden, um die Konstruktionsschritte nochmals ablaufen zu lassen. Außerdem ist es so möglich, an jeder beliebigen Stelle der Konstruktion neue Objekte nachträglich einzufügen.

In Bezug auf das funktionale Denken ist die Interaktivität des Konstruktionsprotokolls interessant: durch Ziehen einer Zeile mit der Maus lässt sich nämlich die Konstruktionsreihenfolge verändern. So ist es im Beispiel möglich, den Punkt C in der vierten Zeile zum dritten Konstruktionsschritt zu machen, wodurch die Gerade g um eine Position nach unten rutscht. Wird hingegen versucht, die Gerade h nach oben zu ziehen, verändert sich der Mauszeiger zu einem Verbotsschild, um zu symbolisieren, dass dies nicht möglich ist. Die Frage nach dem *Warum* drängt sich auf und führt in natürlich Weise zu einer Diskussion über funktionale Zusammenhänge. Die implizit in dieser Konstruktion festgelegten funktionalen Abhängigkeiten werden so zum Thema im Unterricht. Die Veränderung der Reihenfolge der Konstruktionsschritte erlaubt auch verschiedene Lösungsvarianten und ermöglicht eine Hinführung zum algorithmischen Denken.

> Nach den Überlegungen zur Optimierung ist die Aufstellung und Ausführung von Herstellvorschriften die nächste wesentliche Konstituente im operativen Begriffsbildungsprozeß. Hier befindet sich eine vortheoretische Basis für die Idee des Algorithmus [. . .]. [2]

Mit der Funktion *Umdefinieren* von GeoGebra können die funktionalen Zusammenhänge einer Konstruktion aufgebrochen und verändert werden. In der obigen Konstruktion könnte beispielsweise die Gerade g von `g = Gerade[A, B]` in `g = Gerade[A, C]` umdefiniert werden. Dabei verändert GeoGebra automatisch die Reihenfolge der Schritte im Konstruktionsprotokoll, falls C in der Tabelle unterhalb von g steht. Der Versuch, die Gerade g in `g = Senkrechte[A, h]` umzudefinieren, schlägt hingegen mit dem Hinweis „Zirkeldefinition“ fehl. Auf diese Art lässt sich funktionales Denken auch im Bereich der Geometrie an vielfältigen Beispielen fördern.

Dynamische Funktionen

Bei der Betrachtung von Funktionen in einer Variablen der Form $f : x \mapsto f(x)$ unterscheidet Malle zwei Aspekte (vgl. [10]):

Zuordnung: Jedem x wird genau ein $f(x)$ zugeordnet.

Kovariation: Wird x verändert, so ändert sich $f(x)$ in einer bestimmten Weise und umgekehrt.

Während die Funktion beim Zuordnungsaspekt lokal betrachtet wird, macht der Kovariationsaspekt eine globalere Sichtweise der Funktion notwendig. Beide Aspekte sind auch bei unterschiedlichen Darstellungen praktisch immer präsent. Eine Wertetabelle lässt sich zeilenweise (Zuordnungsaspekt) oder spaltenweise (Kovariationsaspekt) lesen. Am Graphen einer Funktion kann ein bestimmer Funktionswert abgelesen werden (Zuordnungsaspekt), andererseits ist auch erkennbar, wie sich der Funktionswert verändert, wenn sich das Argument verändert (Kovariationsaspekt). Beispiele für konkrete Fragen zu beiden Aspekten sind (vgl. [10, S. 9]):

Typische Fragen zum Zuordnungsaspekt:

- Welches $f(x)$ gehört zu einem bestimmten x?
- Welches x gehört zu einem bestimmten $f(x)$?

Typische Fragen zum Kovariationsaspekt:

- Wie ändert sich $f(x)$, wenn x wächst?
- Wie muss sich x ändern, damit $f(x)$ fällt?
- Wie ändert sich $f(x)$, wenn x verdoppelt wird?
- Wie muss x geändert werden, damit sich $f(x)$ verdreifacht?
- Wie ändert sich $f(x)$, wenn x um 1 erhöht wird?
- Wie muss x geändert werden, damit $f(x)$ um 2 erniedrigt wird?

GeoGebra bietet mehrere Möglichkeiten, um beiden Aspekten gerecht zu werden. Funktionsplotter und Computeralgebra Systeme haben den didaktischen Nachteil, dass der Prozess der Entstehung eines Funktionsgraphen beim Plotten des Funktionsterms nicht ersichtlich wird. Einen Ausweg bieten hier Tabellenkalkulationsprogramme, mit denen einzelne Punkt einer Wertetabelle gezeichnet werden können. Allerdings ist dieser Weg relativ aufwändig.

Graph als Spur des Punktes $(x, f(x))$

Dynamische Geometrie Systeme bieten inzwischen in der Regel die Möglichkeit, Punkte über berechnete Koordinaten anzugeben. Dadurch kann einem konkreten x dynamisch ein Punkt $(x, f(x))$ zugeordnet werden. Abbildung 4 zeigt, wie der Zuordnungsaspekt auf diese Weise mit GeoGebra umgesetzt wurde, wobei der Graph der Funktion punktweise als Spur des Punktes $(x, f(x))$ entstanden ist. Um den Kovariationsaspekt zu betonen, kann der Punkt auch umgekehrt in dynamischer Abhängigkeit von $f(x)$ festgelegt werden.

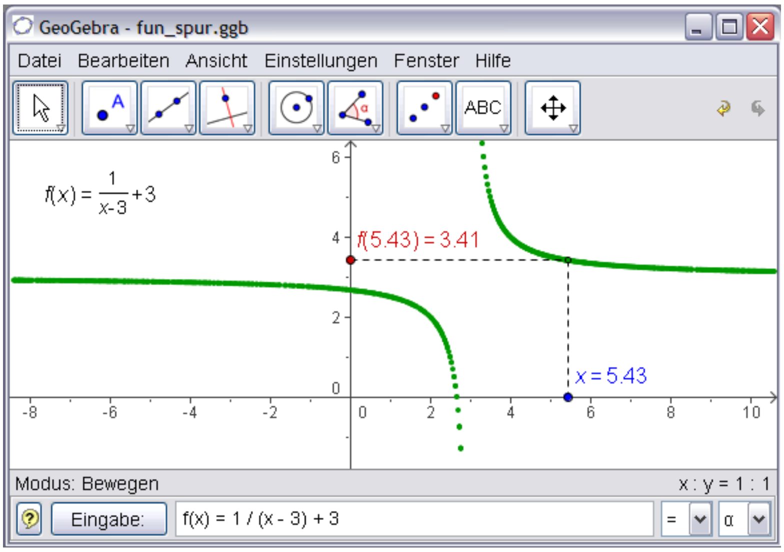

Abbildung 4: Graph einer Funktion als Spur des Punktes $(x, f(x))$

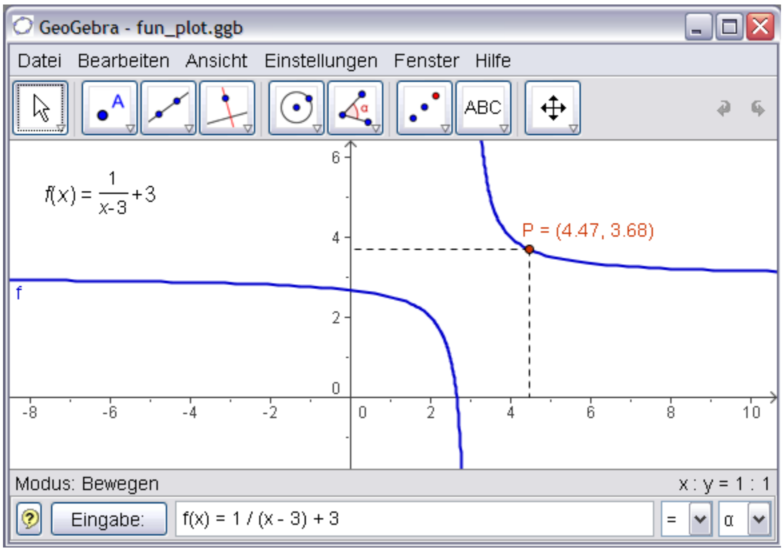

Abbildung 5: Punkt auf dem Graphen einer Funktion

Punkt auf dem Graphen

Anders als klassische dynamische Geometrie Software wie *Cabri II* oder *Dynageo* unterstützt GeoGebra Funktionen der Form $f(x)$ als eigenständigen Objekttyp. Dadurch können Funktionsgraphen wie mit einem Funktionsplotter auf einen Schlag - ohne den aufwändigen Umweg über Ortslinien - dargestellt werden. Im Unterschied zu einem Computeralgebra System sind aber auch dynamische geometrische Konstruktionen nutzbar. Durch einfaches Anklicken des Funktionsgraphen wird ein Punkt darauf gesetzt (vgl. Abbildung 5). Die Koordinaten dieses Punktes werden dynamisch aktualisiert während er mit der Maus entlang des Graphen gezogen wird. Umgekehrt ist auch die direkte Angabe der x-Koordinate des Punktes möglich - seine y-Koordinate wird dabei automatisch angepasst. In Kombination mit einem Zugang über die Spur des Punktes $(x, f(x))$ kann auch hier die Entstehung des

Graphen veranschaulicht werden.

Die Möglichkeit der direkten Eingabe von Funktionen gibt es übrigens auch in der dynamischen Geometrie Software *Geonext* (vgl. http://www.geonext.de). Anders als mit GeoGebra ist es dort jedoch nicht möglich, den Funktionsterm nachträglich zu verändern. Gerade dies ist aber bei der Untersuchung von Funktionen sehr häufig nötig.

Dynagraph

Dynagraph (vgl. [4]) ist eine dynamische Umsetzung der wenig genutzten Leiterdiagramm-Darstellung von Funktionen, die dem Kovariationsaspekt sehr entgegen kommt (vgl. [10]). Dabei wird ein Wertepaar von x und $f(x)$ auf zwei parallelen Zahlenstrahlen dargestellt. Ein Dynagraph kann mit dynamischen Geometrie Systemen sehr schön umgesetzt werden, indem die Veränderung von x im Zugmodus eine Veränderung von $f(x)$ bewirkt. Zusätzlich kann auch die Spur von $f(x)$ betrachtet werden (vgl. Abbildung 6).

> Dabei entsteht im Zugmodes schnell und besonders eindrucksvoll ein Gefühl für Monotonie, Linearität, Extrema, Polstellen und Periodizität, für qualitative Eigenschaften. [3]

Auf der GeoGebra Homepage (http://www.geogebra.at) steht unter „Beispiele“ eine interaktive Version eines Dynagraphen zur Verfügung.

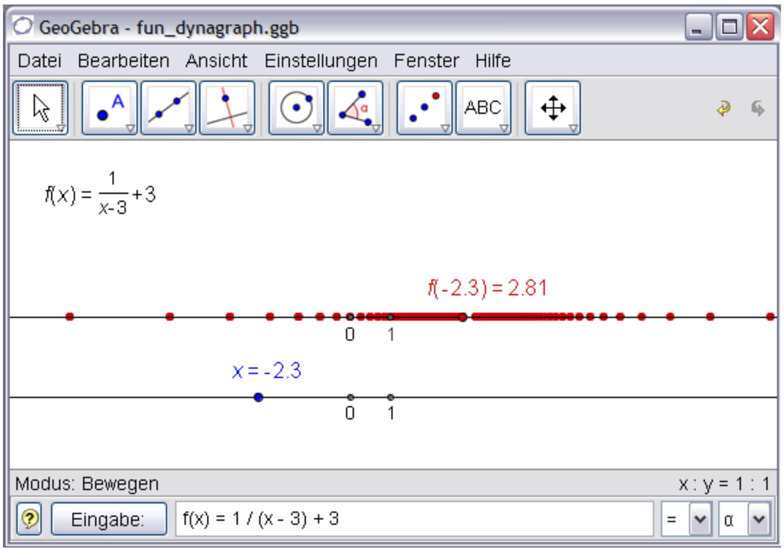

Abbildung 6: Dynagraph

Funktionstypen

> Der Computer kann ohne Zweifel helfen, Eigenschaften von Funktionstypen zu entdecken und zentrale Grundvorstellungen auszubilden. Vor allem ist es mit seiner Hilfe leicht möglich, die Parameter zu variieren und dabei zu beobachten, wie sich der jeweilige Graph verändert. [9, S. 7]

Für die Untersuchung des Einflusses von Parametern in einem Funktionsterm auf den Verlauf des zugehörigen Funktionsgraphen ist GeoGebra ein ideales Werkzeug, da das Programm zwei Möglichkeiten verbindet:

- direkte Unterstützung von *Funktionen als eigener Objekttyp*
- im Grafikfenster integrierte *Schieberegler* zur Veränderung von Parametern

Inzwischen gibt es auch im Computeralgebra System *Derive 6* Schieberegler zur Verändung von Zahlwerten. Leider sind diese aber nicht in das Grafikfenster integriert und die Qualität der Darstellung ist aufgrund des Ruckelns und der fehlenden Kantenglättung deutlich geringer als in GeoGebra. Für Paramteruntersuchungen an Funktionen bietet sich mit GeoGebra folgende Vorgangsweise an:

1. Beginn mit konkreten Parameterwerten für den untersuchten Funktionstyp
2. Einführung der Parameter als Schieberegler und Verallgemeinerung zum untersuchten Funktionstyp
3. gezielte Variation der Parameter

So kann beispielsweise der Einfluss der Parameter p und q auf die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ untersucht werden - etwa um einen Zusammenhang zwischen diesen Parametern und dem Scheitelpunkt (vgl. Abbildung 7) oder den Nullstellen der Funktion herzustellen. (1) Zunächst beginnt man mit konkreten Beispielen wie $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = x^2 + x$, usw. Die Gleichung der Funktion kann im Algebrafenster dabei schnell und problemlos verändert werden. (2) Nachdem erste Vorstellungen über den Einfluss der Parameter gewonnen wurden, folgt die Verallgemeinerung der Funktion f. Dazu werden zwei Schieberegler für p und q erzeugt und die Funktion f in $f(x) = x^2 + px + q$ umdefiniert. (3) Die Parameter p und q können nun auf mehrere Arten verändert werden: im Grafikfenster mit Hilfe der Schieberegler und im Algebrafenster durch direkte Eingabe eines Werts oder ebenfalls kontinuierlich mit Hilfe der Pfeiltasten. In dieser Phase ist es besonders wichtig, auf eine gezielte Vorgangsweise bei der Variation der Parameter zu achten. Dies kann etwa durch begleitende Fragestellungen auf einem Arbeitsblatt geschehen.

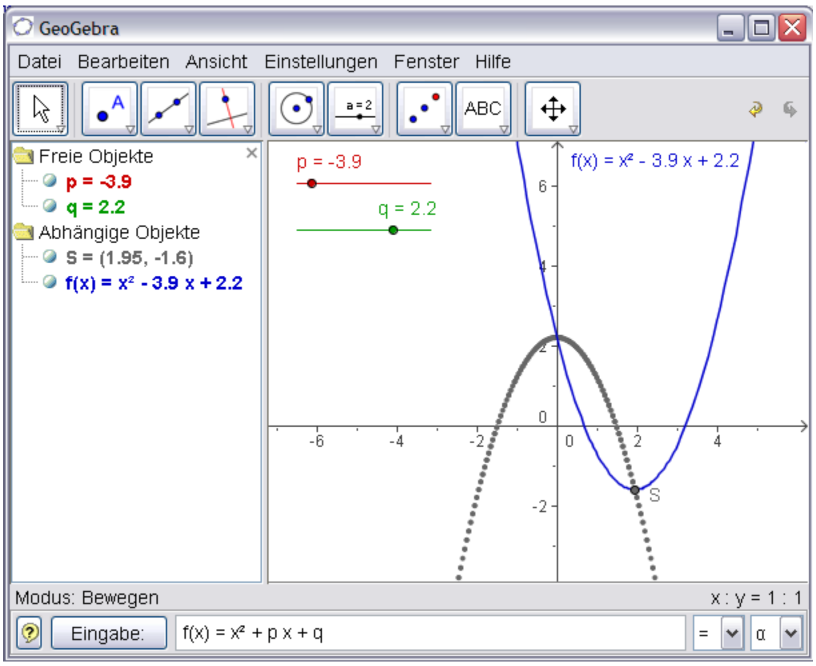

Abbildung 7: Einfluss des Parameters p auf den Scheitelpunkt von $f(x) = x^2 + px + q$

Solche dynamischen Parameteruntersuchungen eignen sich sehr gut für entdeckendes Lernen und ermöglichen insbesondere den Blick auf Spezialfälle.

> Das wesentlichste Merkmal des entdeckenden Lernens ist [...] die Tatsache, dass der Hauptinhalt dessen, was gelernt werden soll, nicht gegeben ist, sondern vom Schüler entdeckt werden muss. [1, S. 47]

Die statische Darstellung von Funktionenscharen als mehrere gleichzeitig gezeichnete Graphen hat den Nachteil, dass für Schüler nur schwer zu erkennen ist, welcher Parameterwert zu welchem Graphen gehört. Der große Vorteil von GeoGebra gegenüber anderen Programmen ist zudem die äußerst einfache Bedienbarkeit: Schüler können die oben angeführten Schritte mit minimalem Vorwissen selbsttätig durchführen. Dies fördert zum einen die Schüleraktivität und mindert zum anderen den Vorbereitungsaufwand für die Lehrkraft.

Umkehrfunktionen und -relationen

GeoGebra eignet sich auch sehr gut zur Einführung in das Thema *Umkehrfunktion* bzw. *Umkehrrelation*. In Abbildung 8 ist die Umkehrrelation zur Einheitsparabel zu sehen. Diese wurde in GeoGebra als Ortslinie konstruiert: der Punkt P auf dem Graphen von f wird an der Geraden $g : y = x$ zu P' gespiegelt. Der Graph der Umkehrrelation ergibt sich als Ortslinie von P' in Abhängigkeit von P.

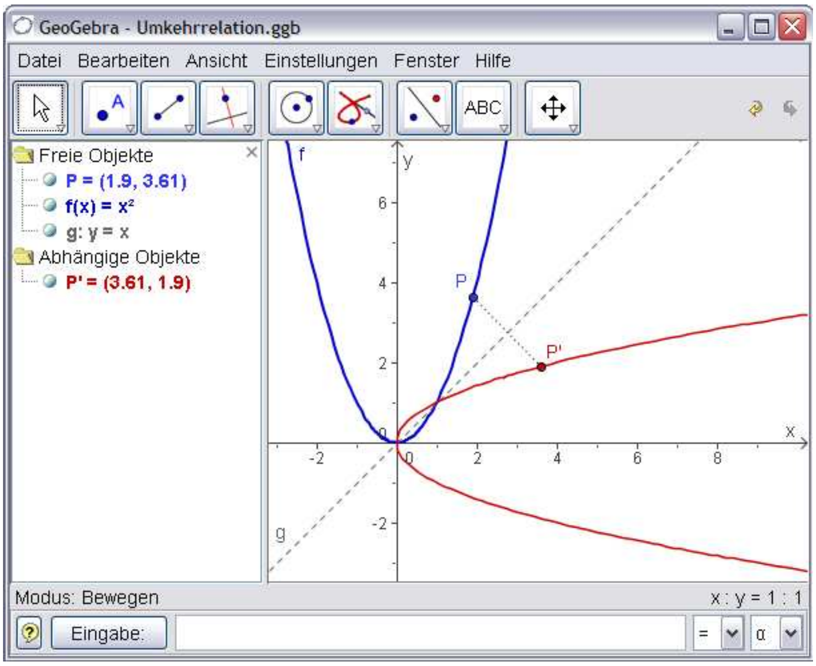

Abbildung 8: Umkehrrelation zu $f(x) = x^2$

Das Schöne an dieser Konstruktion ist ihre Allgemeinheit: der Funktionsterm von f kann beliebig verändert werden, um Umkehrrelationen anderer Funktionen zu untersuchen (siehe Abbildung 9). Durch Ziehen des Punktes P kann zudem jeweils der entsprechende Punkt P' auf der Umkehrfunktion beobachtet werden.

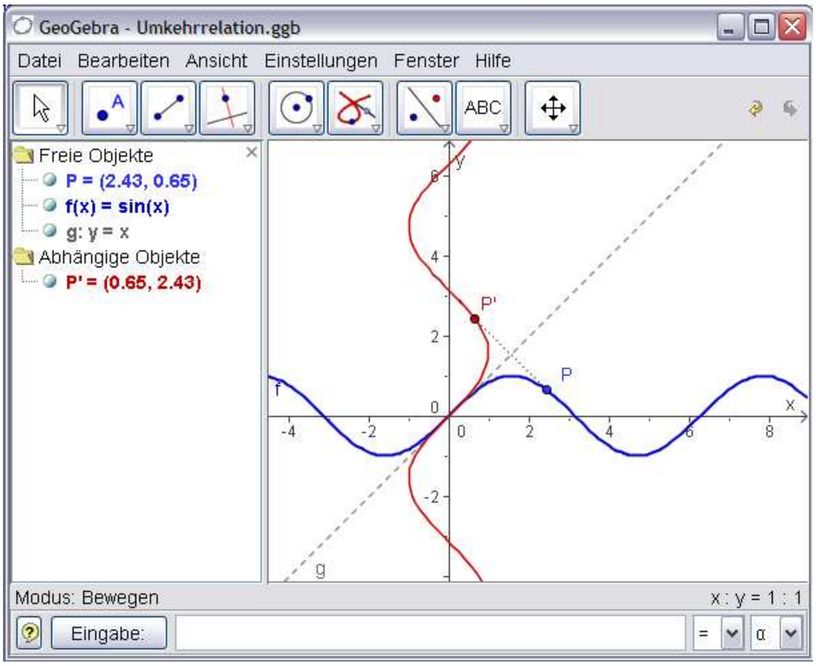

Abbildung 9: Umkehrrelation zu $f(x) = \sin(x)$

1 Schlussbemerkung

Neue Technologien bieten auf vielen Gebieten neue didaktische Möglichkeiten zur modernen Behandlung traditioneller Inhalte. Im Bereich der Geometrie sind mittlerweile dynamische Geometrie Systeme nahezu selbstverständlich. Die eben vorgestellten Beispiele zeigen, dass sich mit einem Werkzeug wie GeoGebra ein solcher bedienungsfreundlicher und dynamischer Ansatz auch für Funktionen realisieren lässt.

Autor

Markus Hohenwarter
Didaktik der Mathematik und Informatik
Universität Salzburg, Hellbrunnerstr. 34, IDN
A - 5020 Salzburg, Österreich
http://www.geogebra.at

Literatur

[1] Ausubel, D.P. ; Novak, J.D ; Hanesian, H.: *Psychologie des Unterrichts*. 2. Weinheim : Beltz, 1981

[2] Bender, P. ; Schreiber, A.: *Operative Genese der Geometrie*. Bd. 12. hpt, 1985

[3] Elschenbroich, H.-J.: Funktionen dynamisch entdecken. In: Bender (Hrsg.) ; Herget (Hrsg.) ; Weigand (Hrsg.) ; Weth (Hrsg.): *Lehr und Lernprogramme für den Mathematikunterricht*. Hildesheim : Franzbecker, 2003

[4] Goldenberg, P. ; Lewis, P. ; O'Keefe, J.: Dynamic representation and the development of an understanding of function. In: Harel, E. (Hrsg.): *The concept of*

Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy Bd. 25. Washington : Mathematical Association of America, 1991

[5] Gutzmer, A.: Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. Reformvorschläge von Meran. In: Gutzmer, A. (Hrsg.): *Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte*. Leipzig : Teubner, 1908, S. 93–114. – Nachdruck in: Der Mathematikunterricht 26 (1980), Heft 6, S. 53–62

[6] Kautschitsch, H.: Reaktivierung funktionalen Denkens durch computerunterstützte experimentelle Mathematik. In: Kadunz, G. (Hrsg.): *Mathematische Bildung und neue Technologien*. Stuttgart : Teubner, 1998, S. 175–182

[7] Kautschitsch, H.: DGS-unterstütztes Vermuten und Beweisen. In: *Zeichnung - Figur - Zugfigur*. Franzbecker, 2001, S. 113–122

[8] Krüger, K. (Hrsg.): *Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips*. Berlin : Logos, 1999

[9] Malle, G.: Funktionen untersuchen - ein durchgängiges Thema. In: *Mathematik Lehren* (2000), Nr. 103, S. 4–7

[10] Malle, G.: Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: *Mathematik Lehren* (2000), Nr. 103, S. 8–11

[11] Schweiger, F.: Fundamentale Ideen - Eine geistesgeschichtliche Studie. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 2/3 (1992), S. 199–214

[12] Vollrath, H.J.: Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 10 (1989), S. 3–37